EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI

Esercizi svolti

1. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $(t^2+1)x' + x^2 = 0$.

2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' + t \tan x = 0 \\ x(0) = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$

3. Determinare a per cui $x(t) = te^{at}$ è una soluzione di $tx'' - tx' - x = 0$.

4. Trovare la soluzione generale delle equazione lineare $(\sin t)x' + (\cos t)x = e^t$.

5. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' - x = 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$

6. Trovare la soluzione generale del sistema $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2. \end{cases}$

7. Trovare la soluzione di $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_3' = -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$

8. Determinare la soluzione di $\begin{cases} x'' - 2x' - 8x = 0, \\ x(1) = 1 \; x'(1) = 0 \end{cases}$ e il suo valore in $x = 0$.

9. Determinare una soluzione particolare di $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}(1 + \cos t) + 5t^2$.

10. Risolvere il problema $\begin{cases} x'' - x = te^t \\ x(0) = 0 = x'(0). \end{cases}$

11. Verificare che $\sin 2t$ è una soluzione di $x'''' + 4x''' + 8x'' + 16x' + 16x = 0$, e trovare la soluzione generale.

12. Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Trovare la soluzione di $X' = AX$ con $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Se x non è identicamente nullo, abbiamo

$$\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{1+t^2} \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{x^2} = -\int \frac{dt}{1+t^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \arctan t + c$$

Quindi,

$$x(t) = \frac{1}{\arctan t + c},$$

c costante. L'equazione ammette anche la soluzione $x(t)=0$ (che corrisponde a $c=\pm\infty$).

2. Separando le variabili,

$$\frac{x'}{\tan x} = -t \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int t\, dt$$
$$\Rightarrow \ln(\sin x) = -\tfrac{1}{2}t^2 + c \Rightarrow \sin x = a e^{-t^2/2},$$

dove c, $a = e^c$ sono costanti. Ponendo la condizione iniziale si ottiene $a=1$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta essere $x(t) = \arcsin(e^{-t^2/2})$.

3. Sostituendo $x = te^{at}$ nell'equazione si ha

$$t[e^{at}(-a^2 t - 2a)] - t[e^{at}(-at-1)] - [-te^{at}] = 0 \;\Rightarrow\; (a-a^2)t^2 + (2-2a)t = 0.$$

I coefficienti di t e t^2 devono annullarsi, quindi $a=1$.

4. Divido per $\sin t$ e ottengo

$$x' + \frac{\cos t}{\sin t} x = \frac{e^t}{\sin t},$$

da cui, applicando la formula integrale, si ottiene

$$x(t) = e^{-A(t)}\Big(c + \int \frac{e^t}{\sin t} e^{A(t)} dt\Big),$$

dove $A(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \ln(\sin t)$, e quindi

$$x(t) = \frac{1}{\sin t}\Big(c + \int e^t\, dt\Big) = \frac{c + e^t}{\sin t}.$$

5. Applicando la formula integrale si ottiene

$$x(t) = e^{-A(t)}\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} 1 \cdot e^{A(s)} ds\Big).$$

In questo caso, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, e $A(t) = \int(-1)dt = -t$. Quindi,

$$x(t) = e^t\Big(0 + [-e^{-s}]_0^t\Big) = e^t(1 - e^{-t}) = e^t - 1.$$

Lo stesso risultato segue dal fatto che, moltiplicando l'equazione originale per $e^{A(t)} = e^{-t}$ si ottiene $\frac{d}{dt}(e^{-t}x) = e^{-t}$.

6. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, e quindi il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$, con radici 4 e -1. Ne segue che $x_1(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$ con c_1 e c_2 costanti, e quindi
$$x_2(t) = x_1'(t) = 4c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t}.$$
Si può anche eliminare x_2 dal sistema, ottenendo $x_1'' = 4x_1 + 3x_1'$, che dà origine allo stesseo risultato.

7. La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, e quindi il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^2$. L'unico autovalore è 2 e $A = 2I + N$, dove $N^3 = 0$. Quindi,
$$\begin{aligned} e^{tN} &= I + tN + \tfrac{1}{2}t^2 N^2 \\ &= I + t\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t+1 & -t & -t \\ 5t + \frac{1}{2}t^2 & -4t - \frac{1}{2}t^2 + 1 & -4t - \frac{1}{2}t^2 \\ -4t - \frac{1}{2}t^2 & 3t + \frac{1}{2}t^2 & 3t + \frac{1}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
La soluzione del problema di Cauchy è
$$X(t) = e^{tA} X_0 = e^{t(2I+N)} X_0 = e^{2t} e^{tN} X_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ 5t + \frac{1}{2}t^2 \\ -4t - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix},$$
cioè $x_1 = (1+t)e^{2t}$, $x_2 = (5t + \frac{1}{2}t^2)e^{2t}$, $x_3 = -(4t + \frac{1}{2}t^2)e^{2t}$.

8. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$ e le radici sono $4, -2$. La soluzione generale dell'equazione è perciò $c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ e le condizioni iniziali danno
$$\begin{cases} c_1 e^4 + c_2 e^{-2} = 1 \\ 4c_1 e^4 - 2c_2 e^{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2c_1 e^6 \Rightarrow c_1 = \tfrac{1}{3} e^{-4}.$$
Quindi $x(t) = \frac{1}{3} e^{4t-4} + \frac{2}{3} e^{2-2t}$, e $x(0) = \frac{1}{3}(e^{-4} + 2e^2)$.

9. Risolviamo prima l'equazione omogenea $L(x) = 0$ dove $L(x)$ sta per $x'' - 4x' + 5x$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ ha radici complesse $\lambda = (4 \pm \sqrt{-4})/2 = 2 \pm i$, e quindi la soluzione generale è $e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$. Per determinare una soluzione particolare basta trovare soluzioni particolari per le equazioni $L(x) = e^{2t}$, $L(x) = e^{2t}\cos t$ e $L(x) = 5t^2$ e poi sommarli:

Per l'equazione $L(x) = e^{2t}$ si cerca una soluzione nella forma $x(t) = ae^{2t}$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = e^{2t}$ si ottiene la condizione $a = 1$, e quindi la soluzione particolare e^{2t}.

Siccome $e^{2t}\cos t$ è soluzione di $L(x) = 0$, l'equazione $L(x) = e^{2t}\cos t$ ha una soluzione particolare nella forma $x(t) = te^{2t}(b_1 \sin t + b_2 \cos t)$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = e^{2t}\cos t$ si ottiene la soluzione particolare $\dfrac{\sin t}{2} e^{2t}$.

Per l'equazione $L(x) = 5t^2$, si cerca una soluzione nella forma $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = 5t^2$ si ottiene la soluzione particolare
$$x(t) = \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5}t + t^2.$$

Una soluzione particolare dell'equazione originale è quindi :

$$x(t) = e^{2t} + \tfrac{1}{2}t\,\sin t + \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5}t + t^2.$$

Notare che a tale funzione si può sempre aggiungere una qualsiasi combinazione lineare di $e^{2t}\sin t$ e $e^{2t}\cos t$ e si ottiene comunque una soluzione particolare dell'equazione originale.

10. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$ e quindi l'equazione omogenea $L(x) = 0$ ha soluzione generale $c_1e^t + c_2e^{-t}$. Essendo e^t soluzione di $L(x) = 0$ cerco la soluzione particolare nella forma $x(t) = t(a_1 + a_2t)e^t$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = te^t$ si ottiene la soluzione particolare $-\frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$. Tutte le soluzioni dell'equazione originale sono quindi

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - \tfrac{1}{4}te^t + \tfrac{1}{4}t^2e^t.$$

Le condizioni iniziali danno origine alle due condizioni $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0$, cioè $c_1 = \frac{1}{8} = -c_2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \tfrac{1}{8}\,[e^t - e^{-t} - 2te^t + 2t^2e^t].$$

11. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 16\lambda + 16$. $\sin 2t$ è una soluzione se e solo se $2i, -2i$ sono radici. Effetivamente $p(2i) = 2^4 - 4i\,2^3 - 8\,2^2 + 16i\,2 + 16 = 0$, e quindi $\sin 2t$ è una soluzione. È facile osservare che $\lambda = -2$ è un'altra radice e quindi, essendo il prodotto delle 4 radici uguale a $p(0) = 16$, le radici sono $-2, -2, 2i, -2i$. La soluzione generale è

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-2t} + c_3\sin 2t + c_4\cos 2t.$$

12. A ha polinomio caratteristico $\lambda^2 - 5\lambda$, e quindi autovalori 0 e 5. Se $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ è una matrice le cui colonne sono autovettori di A, allora $D = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Segue che

$$e^{tA} = e^{tBDB^{-1}} = Be^{tD}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + e^{5t} & 2 - 2e^{5t} \\ 2 - 2e^{5t} & 1 + 4e^{5t} \end{pmatrix}$$

La soluzione è $e^{tA}X_0 = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{5t} \\ 1 + 4e^{5t} \end{pmatrix}$.