EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI

Esercizi proposti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

   (a) $xx' = 3t^2$ $\quad\left[\sqrt{2t^3+c}\right]$

   (b) $x' = tx + t$ $\quad\left[a\, e^{t^2/2} - 1\right]$

   (c) $tx' - 3x + 1 = 0$ $\quad\left[\frac{1}{3} + at^3\right]$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} (t^2+1)x' + tx = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[1/\sqrt{t^2+1}\right]$

   (b) $\begin{cases} xx' = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[\sqrt{2 - 2\cos t}\right]$

   (c) $\begin{cases} \tan(x') = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[t \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]$

3. (a) Determinare a, b per cui $x(t) = t^2 + at + b$ è una soluzione di $tx'' - (t+2)x' + 2x = 0$. Trovare c per cui $x(t) = e^{ct}$ è una soluzione della stessa equazione. $\quad[a = b = 2,\ c = 1]$

   (b) Trovare k per cui $x(t) = t^k$ è una soluzione di $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0$; determinare la soluzione $x(t)$ della stessa equazione per cui $x(1) = 1$ e $x'(1) = 0$ $\quad\left[(3t^2 + 2t^{-3})/5\right]$

4. Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari:

   (a) $tx' + x = t$ $\quad\left[\frac{1}{2}t + c/t\right]$

   (b) $tx' + (3t-1)x = 0$ $\quad\left[ate^{-3t}\right]$

   (c) $(t\ln t)x' + x = t$ $\quad[(t+c)/\ln t]$

5. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} tx' - 2x = t^4\cos t \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[t^3\sin t + t^2\cos t + t^2\right]$

   (b) $\begin{cases} x' + \dfrac{x}{t} = \dfrac{t}{t^2+1} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[1 + (\frac{1}{4}\pi - \arctan t)/t\right]$

   (c) $\begin{cases} x' + (\tan t)x = \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\quad[(t+1)\cos t]$

6. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali :

   (a) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\quad\begin{bmatrix} c_1e^t \\ (c_1t + c_2)e^t \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 \end{cases}$ $\quad\begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \\ c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -3x_1 - x_2 \end{cases}$ $\quad\begin{bmatrix} (c_1 + c_2t)e^{2t} \\ (-c_1 + \frac{1}{3}c_2 - tc_2)e^{2t} \end{bmatrix}$

7. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(1) = 1 \\ x_2(1) = -1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 6t-5 \\ 3t-4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} (2-t^2)e^t \\ (2t+t^2)e^t \\ (4t+t^2)e^t \end{bmatrix}$

(c) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 2 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{bmatrix}$

8. Determinare le soluzioni dei problemi

(a) $\begin{cases} x'' - 5x' + 6x = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[3e^{2t} - 2e^{3t}\right]$

(b) $\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1,\ \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \end{cases}$ $\left[e^{-2t}\right]$

(c) $\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 1,\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\left[(1 - t + e^{-3}t)e^{3t}\right]$

(d) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(1) = 1 \end{cases}$ $\left[e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)\right]$

9. Determinare delle soluzioni particolari per le seguenti equazioni:

(a) $x'' + 2x' + 5x = \cos 2t$ [ad esempio $\frac{4}{17}\sin 2t + \frac{1}{17}\cos 2t$]

(b) $x'' - 6x' + 9x = t + e^{3t}$ $\left[\frac{2}{27} + \frac{1}{9}t + \frac{1}{2}t^2e^{3t}\right]$

(c) $x'' + x = t + e^t$ $\left[t + \frac{1}{2}e^t\right]$

(d) $x'' - 5x' - 6x + te^{-t} = 0$ $\left[(\frac{1}{49}t + \frac{1}{14}t^2)e^{-t}\right]$

10. Risolvere i seguenti problemi :

(a) $\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2}t\sin t\right]$

(b) $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 3 - 3e^{-3t} \\ x(0) = 0,\ x(t) \text{ limitata su } [0,\infty) \end{cases}$ $\left[-1 + (1 + \frac{3}{4}t)e^{-3t}\right]$

11. Determinare le soluzioni generali di:

(a) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$ $\left[(c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}\right]$

(b) $x'''' - 3x'' - 4x = e^t$ $\left[c_1\sin t + c_2\cos t + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t} - \frac{1}{6}e^t\right]$

12. (a) Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenendo conto che $B^{-1}AB = D$ è diagonale, e $e^{tA} = e^{tBDB^{-1}} = Be^{tD}B^{-1}$, risolvere il sistema $X' = AX$. $\left[X = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{2t} \\ c_1e^t + 2c_2e^{2t} \end{pmatrix}\right]$

(b) Applicare il metodo del punto (a) per risolvere

$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$